

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий  
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ  
проректор

\_\_\_\_\_ П. А. Машаров  
«17» апреля 2025 г.  
МП

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

### **СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ**

Укрупненная группа направлений подготовки	01.00.00 Математика и механика
Программа высшего образования	Программа магистратуры
Направление подготовки	01.04.01 Математика
Направленность (профиль) образовательной программы	Математика
Квалификация	Магистр
Форма обучения	Очная

Рабочая программа может быть адаптирована для лиц  
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2025

Рабочая программа дисциплины **«Современные проблемы математики»** для обучающихся по направлению подготовки 01.04.01 Математика (Профиль: Математика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 12 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2025 года.

Разработчик:

профессор кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений  
доктор физ.-мат. наук, профессор

В.В. Волчков

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений.  
Протокол от 08.04.2025 г. № 9а

Заведующий кафедрой

В. В. Волчков

СОГЛАСОВАНО:

Декан факультета математики и  
информационных технологий  
16.04.2025 г.

И. А. Моисеенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.  
Протокол от 16.04.2025 г. № 3.  
Председатель

Л. И. Селякова

Руководитель основной образовательной  
программы, д-р физ.-мат. наук, проф.  
16.04.2025 г.

В. В. Волчков

## 1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1. Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной:

базовая подготовка по математике в объеме программы средней школы;

дисциплины программы бакалавриата: Математический анализ, Комплексный анализ, Функциональный анализ, Теория меры и интеграла.

1.2. Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Научный семинар по вопросам математического анализа, Контрпримеры в анализе, Избранные задачи теории чисел, Производственная практика: научно-исследовательская работа (обязательная), Производственная практика: преддипломная практика (обязательная), Выполнение и защита выпускной квалификационной работы.

## 2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1. Общая характеристика

Наименование показателя	Значение показателя
Название образовательной программы (далее – ОП)	01.04.01 Математика (Профиль: Математика)
Шифр и название в соответствии с учебным планом	Б1.Б.13 Современные проблемы математики
Часть образовательной программы	Базовая часть
Количество зачетных единиц / всего часов	3 / 108

В случае предъявления от обучающегося или его родителя (законного представителя) заявления на обучение по адаптированной образовательной программе высшего образования, подкрепленного заключением психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК) или медико-социальной экспертизы (МСЭ) с рекомендациями создания индивидуальной программы реабилитации и абилитации (ИПРА), данная рабочая программа может быть адаптирована с учетом индивидуальных особенностей здоровья обучающегося.

### 2.2. Распределение часов по формам и периодам обучения

Форма обучения	курс	семестр	Общее количество часов					Форма контроля
			лекционных	лабораторных	практических	самостоятельной работы + контроль	всего	
Очная	1	2	17	0	34	57	108	экзамен
Очная, всего			17	0	34	57	108	

## 3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Формирование научного мировоззрения; овладение новым математическим аппаратом; углубленная подготовка в области анализа (вещественного и комплексного); подготовка к профессиональной деятельности; подготовка к чтению специальной литературы.

#### 4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

##### 4.1. Компетенции

ОПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики

##### 4.2. Индикаторы компетенций

ОПК-1.2. Применяет классические и современные математические методы для решения фундаментальных задач гармонического анализа и интегральной геометрии.

##### 4.3. Результаты обучения

ОПК-1.2.1. Знает определения и утверждения, приёмы доказательства утверждений, методы решения задач гармонического анализа и интегральной геометрии.

ОПК-1.2.2. Умеет выбирать и использовать необходимые математические методы и вычислительные средства, решать задачи дисциплины (находить инфинитезимальные операторы, находить меру Хаара на группе, вычислять интегралы от специальных функций).

ОПК-1.2.3. Владеет методами теории представлений, теории операторов преобразования и теории интегрально-геометрических преобразований.

#### 5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Название темы	Краткое содержание темы (вопросы темы)
Раздел 1. Основная задача некоммутативного гармонического анализа	1.1. Представления групп 1.2. Сферические гармоники 1.3. Гармонический анализ на сферах
Раздел 2. Проблема спектрального анализа-синтеза	2.1. Подпространства, инвариантные относительно сдвигов 2.2. Теорема Шварца о спектральном синтезе 2.3. Многомерные аналоги теоремы Шварца
Раздел 3. Проблема Помпейю	3.1. Преобразование Помпейю 3.2. Проблемы инъективности и обращения 3.3. Приложения
Раздел 4. Проблема Радона	4.1. Интегрально-геометрические преобразования. Примеры 4.2. Формулы обращения 4.3. Проблема носителя

#### 6. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

##### 6.1. Форма обучения – очная, курс – 1, семестр – 2

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего
Раздел 1. Основная задача некоммутативного гармонического анализа	<b>4</b>		<b>8</b>	<b>14</b>	<b>26</b>
Представления групп	2		4	4	10
Сферические гармоники	1		2	4	7
Гармонический анализ на сферах	1		2	6	9

Раздел 2. Проблема спектрального анализа-синтеза	<b>4</b>		<b>8</b>	<b>10</b>	<b>22</b>
Подпространства, инвариантные относительно сдвигов	1		2	4	7
Теорема Шварца о спектральном синтезе	1		2	2	5
Многомерные аналоги теоремы Шварца	2		4	4	10
Раздел 3. Проблема Помпейю	<b>5</b>		<b>10</b>	<b>20</b>	<b>35</b>
Преобразование Помпейю	1		2	4	7
Проблемы инъективности и обращения	3		6	12	21
Приложения	1		2	4	7
Раздел 4. Проблема Радона	<b>4</b>		<b>8</b>	<b>13</b>	<b>25</b>
Интегрально-геометрические преобразования. Примеры	1		2	3	6
Формулы обращения	2		4	7	13
Проблема носителя	1		2	3	6
ИТОГО ЗА СЕМЕСТР / ПО КОМПОНЕНТУ ОПОП	<b>17</b>	–	<b>34</b>	<b>57</b>	<b>108</b>

## 7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### 7.1. Контрольные вопросы

#### Раздел 1

1. Определение представления группы.
2. Матрица представления.
3. Эквивалентные представления.
4. Неприводимые представления.
5. Прямая сумма представлений.
6. Квазирегулярное представление.
7. Однородные гармонические многочлены.
8. Сферические гармоники. Гармоники бистепени  $(p, q)$ .

#### Раздел 2

9. Примеры подпространств, инвариантных относительно сдвигов.
10. Спектральный анализ.
11. Спектральный синтез.
12. Проблема Шварца. Теорема Гуревича.
13. Теорема Мальгранжа.
14. Аппроксимационная теорема Хермандера.
15. Теорема Брауна-Шрейбера-Тейлора.

#### Раздел 3

16. Определение множеств Помпейю.
17. Теорема Вильямса.
18. Множества Помпейю с вещественно-аналитической границей.
19. Экстремальные задачи о множествах Помпейю.
20. Семейства с локальным свойством Помпейю.
21. Эквивалентность свойств Мореры и Помпейю.
22. Связь свойства Помпейю с условием Бохера-Кебе.

#### Раздел 4

23. Преобразование Радона.
24. Преобразование Минковского-Функа.
25. Орициклическое преобразование.
26. Преобразование Радона по геодезическим на  $H^2$ .

#### 7.2. Темы докладов (рефератов)

1. Квазирегулярное представление компактной симплектической группы.
2. Гармонический анализ на  $H^2$ .
3. Операторы преобразования.
4. Классы множеств Помпейю.
5. Формулы обращения преобразования Радона.
6. Теорема Эренпрейса-Маутнера о спектральном синтезе.
7. Свойства класса функций с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса.

#### 7.3. Темы письменных работ (типы задач)

Контрольные работы по практике темам:

- инфинитезимальные операторы (нахождение инфинитезимальных операторов);
- решение интегральных уравнений (решение уравнения типа Абеля);
- инвариантное интегрирование (нахождение меры Хаара).

Контрольная работа по проверке теоретических знаний – по всем темам, с использованием указанных выше контрольных вопросов.

#### 7.4. Образец содержания экзаменационного билета:

1. Теорема Вильямса.
2. Найдите меру Хаара на группе конформных автоморфизмов круга.
3. Найдите инфинитезимальные операторы, соответствующие вращениям в двумерных плоскостях.

В случае ведения учебного процесса с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, содержание билета может отличаться от приведенного.

## 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже.

Организационно-учебная работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

Самостоятельная работа оценивается на основе предоставленных на проверку выполненных домашних, индивидуальных заданий с учетом своевременности их предоставления и соответствия требованиям к их выполнению.

Количество баллов за контрольную работу вычисляется как сумма баллов за все входящие в её состав задания. Каждое задание оценивается исходя из максимально возможного количества баллов с учетом правильности выполнения задания, полноты приводимых обоснований.

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, имеет право получить оценку. Те, кто претендует на более высокий балл, проходят промежуточную аттестацию. Максимальное количество баллов на промежуточной

аттестации – 100. Общее количество баллов за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на промежуточной аттестации и выставляется согласно принятому порядку.

#### 8.1. Семестр 2

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
1-3	Организационно-учебная работа в аудитории	5
	Самостоятельная работа	5
	Контрольные работы по практике	50
	Контрольная работа по теоретическому материалу	40
ИТОГО		100
Промежуточная аттестация		100
Общий итог за семестр		100

#### Соответствие баллов оценке

Количество баллов из 100	ECTS	Оценка по пятибалльной шкале	
		Экзамен, дифференцированный зачет	Зачет
90-100	A	отлично	зачтено
80-89	B	хорошо	зачтено
75-79	C		зачтено
70-74	D	удовлетворительно	зачтено
60-69	E		зачтено
35-59	FX	неудовлетворительно	не зачтено
0-34	F		не зачтено

### 9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.405).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины могут применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

### 10. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

#### 10.1. Основная литература

1. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ/С. Хелгасон. - Москва: Мир, 1987 - 736 с.
2. Виленкин, Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп / Н.Я. Виленкин. - Москва: Наука, 1991. - 576 с.
3. Волчков, В. В. Элементы гармонического анализа / В.В. Волчков, Вит.В. Волчков. - Донецк :ДонНУ, 2013. - 100 с.

#### 10.2. Дополнительная литература

4. Стейн, И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. - М.: Мир, 1974. - 334 с.
5. Рудин, У. Теория функций в единичном шаре из  $C^n$ / У. Рудин. - Москва: Мир, 1984- 456 с.

### 11. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. **Национальная электронная библиотека (НЭБ):** федеральная государственная информационная система / Министерство Культуры РФ; Российская государственная библиотека. – Москва, 2019- . – URL: <https://rusneb.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный, подписка. Необходима установка программного обеспечения. – Текст: электронный.
2. **eLIBRARY.RU:** научная электронная библиотека: сайт. – Москва, 2000- . – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. –Текст: электронный.
3. Научная электронная библиотека «**КиберЛенинка**»: сайт / Ассоциация «Открытая наука». – Москва, 2014- . – URL: <https://cyberleninka.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
4. Электронно-библиотечная система «**Лань**»: [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания Сетевой электронной библиотеки, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
5. **ЭБС Юрайт:** электронная библиотечная система: сайт. – Москва, 2013. – URL: <https://urait.ru/library/svobodnyy-dostup/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания свободного доступа, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
6. **Электронно-библиотечная система ДонГУ:** сайт / ФГБОУ ВО «ДонГУ». – Донецк, 2016- . – URL: <http://library.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
7. **Электронный каталог** Научной библиотеки ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://library.donnu.ru/catalog/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – для пользователей ДонГУ.
8. **Электронный архив ДонГУ:** раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://repo.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный.

### 12. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДонГУ № 46484614)
2. Microsoft Office (корпоративная лицензия ДонГУ № 46472919)
3. Microsoft Visual Studio (лицензия программы Dream Spark для высших учебных заведений)
4. Антивирус Касперского, Adobe Acrobat Reader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSD для свободного программного обеспечения).